2.9.10 Exponenciální rovnice (shrnutí)

Př. 1: Vyřeš rovnici $\left(\frac{8}{27}\right)^x = \frac{9}{4}$.

$\left(\left[\frac{2}{3}\right]^3\right)^x = \left(\frac{3}{2}\right)^2$ $\left(\frac{2}{3}\right)^{3x} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$ $3x = -2$ $x = -\frac{2}{3}$ $K = \left\{-\frac{2}{3}\right\}$

Př. 2: Vyřeš rovnici $4 \cdot 2^x \cdot \sqrt{2} = 4^x \cdot 2$.

$2^2 \cdot 2^x \cdot 2^{\frac{1}{2}} = \left(2^2\right)^x \cdot 2$ $2^{x+2+\frac{1}{2}} = 2^{2x+1}$ (můžeme přejít od mocnin k normální rovnici)

$x + 2 + \frac{1}{2} = 2x + 1$ $x = \frac{3}{2}$ $K = \left\{\frac{3}{2}\right\}$

Př. 3: Vyřeš rovnici: $3^{x+1} + 2 \cdot 3^x = 5^{x+1} - 2 \cdot 5^x$.

$3^{x+1} + 2 \cdot 3^x = 5^{x+1} - 2 \cdot 5^x \quad / : 5^x$ $\frac{3^{x+1}}{5^x} + 2 \cdot \frac{3^x}{5^x} = \frac{5^{x+1}}{5^x} - 2 \cdot \frac{5^x}{5^x}$ $3\left(\frac{3}{5}\right)^x + 2 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^x = 5 - 2$

Substituce: $a = \left(\frac{3}{5}\right)^x$ $3a + 2a = 3$ $5a = 3$ $a = \frac{3}{5}$

$a = \frac{3}{5} = \left(\frac{3}{5}\right)^x$ $x = 1$ $K = \{1\}$

Př. 4: Vyřeš rovnici $3^x - 3^{x-1} - 2 \cdot 3^{x-2} - 3 \cdot 3^{x-3} = 9$.

Substituce: $a = 3^{x-3}$

$3^{x-2} = 3^{x-3+1} = 3^{x-3} \cdot 3 = 3a$, $3^{x-1} = 3^{x-3+2} = 3^{x-3} \cdot 3^2 = 9a$, $3^x = 3^{x-3+3} = 3^{x-3} \cdot 3^3 = 27a$

$3^x - 3^{x-1} - 2 \cdot 3^{x-2} - 3 \cdot 3^{x-3} = 9$ $27a - 9a - 2 \cdot 3a - 3a = 9$ $9a = 9$ $a = 1$

$a = 3^{x-3} = 1$ $3^{x-3} = 3^0$ $x - 3 = 0$ $x = 3$ $K = \{3\}$

Př. 5: Vyřeš rovnici $\frac{5^{x^2} \cdot 2^{x^2}}{5^{-8}} = \frac{2^{-8}}{10^{-11x+2}}$.

$\frac{5^{x^2} \cdot 2^{x^2}}{5^{-8}} = \frac{2^{-8}}{10^{-11x+2}} \quad / \cdot 5^{-8}$ $10^{x^2} = \frac{5^8 \cdot 2^{-8}}{10^{-11x+2}} = \frac{10^{-8}}{10^{-11x+2}}$

$10^{x^2} = 10^{-8-(-11x+2)} = 10^{11x-10}$ $x^2 = 11x - 10$ $x^2 - 11x + 10 = (x-10)(x-1) = 0$

$x_1 = 10$, $x_2 = 1$ $K = \{1; 10\}$

Př. 6: Vyřeš rovnici $2 \cdot 4^x + 3 \cdot 9^x = 5 \cdot 6^x$.

$2 \cdot 2^x \cdot 2^x + 3 \cdot 3^x \cdot 3^x = 5 \cdot 2^x \cdot 3^x$ $2 \cdot 2^x \cdot 2^x + 3 \cdot 3^x \cdot 3^x = 5 \cdot 2^x \cdot 3^x \quad : / 3^x \cdot 3^x$

$2 \cdot \frac{2^x \cdot 2^x}{3^x \cdot 3^x} + 3 \cdot \frac{3^x \cdot 3^x}{3^x \cdot 3^x} = 5 \cdot \frac{2^x \cdot 3^x}{3^x \cdot 3^x}$ $2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^x \left(\frac{2}{3}\right)^x + 3 = 5 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^x$

Substituce: $\left(\frac{2}{3}\right)^x = a$ $2a \cdot a + 3 = 5a$ $2a^2 - 5a + 3 = 0$

$$a_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3}}{2 \cdot 2} = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{4} = \frac{5 \pm 1}{4}$$

$a_1 = \frac{5+1}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$ $a_2 = \frac{5-1}{4} = 1$

$a_1 = \left(\frac{2}{3}\right)^{x_1} = \frac{3}{2}$ $\left(\frac{2}{3}\right)^{x_1} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-1}$ $x_1 = -1$ $a_2 = \left(\frac{2}{3}\right)^{x_2} = 1$ $\left(\frac{2}{3}\right)^{x_2} = \left(\frac{2}{3}\right)^{0}$ $x_2 = 0$

$K = \{-1; 0\}$

Př. 7: Vyřeš rovnici $\sqrt[x]{2^3} \cdot 8 = \sqrt{\sqrt[x]{2} \cdot 4}$.

$\left(2^3\right)^{\frac{1}{x}} \cdot 2^3 = \left(2^{\frac{1}{x}} \cdot 2^2\right)^{\frac{1}{2}}$ $2^{\frac{3}{x}} \cdot 2^3 = 2^{\frac{1}{2x}} \cdot 2$ $2^{\frac{3}{x}+3} = 2^{\frac{1}{2x}+1}$ $\frac{3}{x} + 3 = \frac{1}{2x} + 1$

$\frac{3+3x}{x} = \frac{1+2x}{2x}$ $/ \cdot 2x$ $2(3+3x) = 1+2x$ $6+6x = 1+2x$ $4x = -5$

$x = -\frac{5}{4}$ $K = \left\{-\frac{5}{4}\right\}$

Př. 8: Vyřeš rovnici $2^{2x} \cdot 5^{x+1} = 4^{x+1} + 4^x$.

$2^{2x} \cdot 5^{x+1} = 4^x \cdot 4 + 4^x = 4^x(4+1)$ $2^{2x} \cdot 5^{x+1} = 5 \cdot 4^x$ $2^{2x} \cdot 5^{x+1} = 5 \cdot 2^{2x}$ $/ : 2^{2x}$

$5^{x+1} = 5$ $x+1 = 1$ $x = 0$ $K = \{0\}$

Př. 9: Vyřeš rovnici $3^x + 2 \cdot 3^{1-x} = 5$.

$3^x + 2 \cdot 3^{1-x} = 5$ $3^x + 2 \cdot 3 \cdot 3^{-x} = 5$ $3^x + 6 \cdot \frac{1}{3^x} = 5$ $3^x + \frac{6}{3^x} = 5$

Substituce: $y = 3^x$ $y + \frac{6}{y} = 5$ $/ \cdot y$ $y^2 + 6 = 5y$ $y^2 - 5y + 6 = 0$ $(y-3)(y-2) = 0$

$y_1 = 3$ $y_2 = 2$

$y_1 = 3^{x_1} = 3$

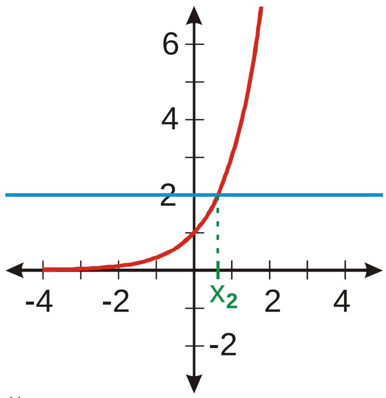
$3^{x_1} = 3^1$

$x_1 = 1$

$y_2 = 3^{x_2} = 2$

$3^{x_2} = 2$

Neumíme napsat 2 jako mocninu trojky (tři na něco). To neznamená, že rovnice $3^{x_2} = 2$ nemá řešení, nakreslíme graf funkce $y = 3^x$ a funkce $y = 2$.



Číslo, které by bylo řešením, existuje, platí pro něj $0 < x_2 < 1$. Je to číslo, na které musíme umocnit trojku, aby vyšla dvojka, ale nevíme, co to je za číslo, jak ho spočítat.
Podobná situace jako u posledního slovního příkladu.
Je vidět, že to budeme muset jednou vyřešit.

$K = \{x_2; 1\}$